

Tartu Ülikool
Loodus- ja täppiseaduste valdkond
Matemaatika ja statistika instituut

Dagmar Nurges

KARMAKARI MEETOD

Matemaatika eriala
Bakalaureusetöö (9 EAP)

Juhendaja: dotsent Peep Miidla

Tartu 2016

Karmarkari meetod

Bakalaureusetöö

Dagmar Nurges

Lühikokkuvõte. Bakalaureusetöö eesmärk on tutvustada üht lineaarsete planeerimise ülesannete lahendusmeetodit – Karmarkari meetodit. Selleks antakse kõigepealt ülevaade lineaarse planeerimise ülesannetest ja nende laialdast rakendust leidnud lahendusmeetodist simpleksmeetodist. Seejärel kirjeldatakse duaalset lineaarse planeerimise ülesannet, mille abil saab suvalise lineaarse planeerimise ülesande viia Karmarkari meetodi rakendamiseks vajalikule kujule ning Karmarkari meetodi teooriat. Lõpetuseks tehakse näide Karmarkari meetodi ühe sammu kohta ja meetodi rakendamisest programmis Scilab.

CERCS teaduseriala: P160 Statistika, operatsioonianalüüs, programmeerimine, finants- ja kindlustusmatemaatika.

Märksõnad: optimeerimine, lineaarne planeerimine, simpleksmeetod, Karmarkari meetod.

Karmarkar's method

Bachelor's thesis

Dagmar Nurges

Abstract. The purpose of the Bachelor's thesis is to introduce the Karmarkar's method for solving linear planning problems. First, an overview about the linear programming problems and their commonly used solving method, simplex method, are given. Then the dual linear programming problem, which enables converting any linear programming problem to a form that is needed for applying the Karmarkar's method, and the theory of Karmarkar's method are described. Finally, an example about one iteration step of the Karmarkar's method and the application of the method in Scilab has been given.

CERCS research specialisation: P160 Statistics, operations research, programming, actuarial mathematics.

Key words: optimization, linear programming, simplex method, Karmarkar's method.

Sisukord

Sissejuhatus	3
1 Lineaarse planeerimise ülesanne	4
1.1 Ajalugu ja tähtsus	4
1.2 Ülesande püstitus	5
2 Simpleksmeetod	7
2.1 Tutvustus	7
2.2 Eeltöö	8
2.3 Iteratsioonisamm	9
3 Karmarkari meetod ehk sisepunkti meetod	13
3.1 Meetodi ajalugu ja selle tähtsus	13
3.2 Duaalne lineaarse planeerimise ülesanne	13
3.3 Lineaarse planeerimise ülesanne Karmarkari kujul	15
3.4 Karmarkari meetod	17
3.5 Näide Karmarkari meetodi ühe sammu kohta	21
3.6 Karmarkari meetod programmis Scilab	24
Viited	26
Lisad	27

Sissejuhatus

Käesoleva bakalaureusetöö valdkond on laiemalt rakenduslik matemaatika, täpsemalt optimeerimine. Töö eesmärgiks on tutvustada Karmarkari meetodit lineaarse planeerimise ülesannete lahendamiseks, tuginedes National Programme on Technology Enhanced Learning materjalidele [7]. Eesti keelses kirjanduses ei ole seda meetodit varem sel moel tutvustatud. Evald Übi on teemat küll oma õpikus "Ekstreemumülesanded majanduses ja tehnikas"[6] käsitlenud, kuid teeb seda teisel moel. Põhjus, miks töö autor otsustas valida nimetatud meetodi kirjeldamiseks NPTEL-i allikad, põhinebki sellel, et tulemusena valmivad materjalid oleksid mitmekülgsed ja arusaadavad erineva taustaga inimestele.

Karmarkari meetodi tähtsus peitub selle arvutitel rakendamise kiiruses võrreldes lineaarse planeerimise ülesannete lahendamisel laialdast kasutust leidnud simpleksmeetodiga, kui muutujaid on palju. Antud bakalaureusetöö on referatiivne ning tugineb lisaks NPTEL-i materjalidele [7] kahele E. Übi õpikule [1, 6], kahele optimeerimist käsitlevale õpikule [2, 4] ja veebiallikele, mis tutvustavad praktilist optimeerimist [3] ning Karmarkari meetodit [5]. Töö koosneb kolmest peatükist.

Esimeses peatükis tutvustatakse lineaarse planeerimise ülesandeid, antakse ülevaade nende ajaloost ja tähtsusest ning ülesande püstitusest. Lisaks tuuakse sisse näiteülesanne, millega tegeletakse ka töö kõigis järgmistes peatükkides.

Teises peatükis kirjeldatakse simpleksmeetodit kui lineaarse planeerimise ülesannete lahendamisel väga laialdast kasutust leidnud meetodit. Selle abil lahendatakse eelmises peatükis sisse toodud näiteülesanne, mida illustreerivad töö autori poolt programmis Scilab valmistatud joonised.

Kolmas, töö kõige tähtsam peatükk, annab ülevaate Karmarkari meetodi teooriast ja kuidas seda suvalise lineaarse planeerimise ülesande puhul rakendada. Lisaks tuuakse sisse duaalne lineaarse planeerimise ülesanne, et näiteülesannet Karmarkari meetodi rakendamiseks vajalikule kujule viia.

1 Lineaarse planeerimise ülesanne

1.1 Ajalugu ja tähtsus

Mitmed asjatundjad peavad lineaarset planeerimist (LP) kõige efektiivsemaks osutunud rakendusmatemaatika valdkonnaks, kuna paljud igapäevased ja juhtimiselased otsused, mis on seotud parima võimaliku lahenduse leidmisega, on esitatavad lineaarse planeerimise ülesandena. Sõltuvalt eesmärgist tuleb kõigepealt valida efektiivsuse kriteerium, mis võib olla näiteks ettevõtte summaarne kasum, tootmisjääkide või transpordikulude kogusumma jne. Sageli osutub, et nii efektiivsuse kriteerium kui ka sellele seatavad piirangud on lineaarsed otsustusmuutujate suhtes ja neist saab konstrueerida LP ülesande. Nende ülesannete lahendusmeetodite uurimisega tegelebki lineaarne planeerimine, mille kasutusvaldkond on väga lai, alates tootmise juhtimisest, sõjandusest, transpordivoogude planeerimisest ja lõpetades pahaloomuliste kasvajate ravi ning toitumise planeerimisega [1]. Kuigi igasugune matemaatiline planeerimine aitab teha otsuseid erinevates olukordades, tuleb rõhutada, et mõiste "parim"täpsustamine kuulub selle valdkonna ülesannete hulka, mille küsimusega parajasti tegeletakse, näiteks majandusteadused või dieetoloogia. Matemaatilises planeerimises eeldatakse, et soovitud eesmärk on varem fikseeritud, nii et ülesandeks jääb vaid selle eesmärgi täpseimal viisil kirjapandava ülesande konstrueerimine ja lahendamine.

Küllaltki suur osa matemaatilise planeerimise ülesannetest (mitte ainult lineaarsed ülesanded) on tavalised ekstreemumülesanded. Praktilisi planeerimise ülesandeid eristavad nendest peamiselt järgmised omadused:

Praktilistes planeerimisülesannetes on palju otsitavaid ning kitsenduste funktsioone, mis teeb ekstreemumi leidmise keeruliseks ning need vajavad efektiivsete lahendusmeetodite loomist. Osutub, et planeerimisülesannete optimaalne lahend asetseb sihifunktsiooni määramispiirkonna rajapunktis ning klassikaliste lahendusmeetodite (tuletise võrdsustamine nulliga) kasutamine on seega välistatud. Lisaks ei ole vaatluse all olev funktsioon sageli diferentseeruv [2].

Lineaarsed planeerimisülesanded moodustavad ühe valdkonna praktilistest planeerimisülesannetest. Nende eripäraks on kõigi funktsioonide lineaarsus otsitavate muutujate suhtes. Esimesed lineaarse planeerimise alased uurimistööd pärinevad 1940ndatest aastatest G. Dantzigi, T. Koopmansi ja L. Kantorovitši sulest. Kaks viimast on oma töö eest saanud ka Nobeli preemia majanduse alal. Kuna matemaatika alal Nobeli preemiat välja ei anta ning preemiate komitee

arvates olid Dantzigi tööd rohkem matemaatilise kallakuga, jäi LP ülesannete põhilise lahendusmeetodi, simpleksmeetodi, looja auhinnast ilma. Ligikaudu kolmkümmend aastat hiljem algas selle teadusharu uus ajajärk, kui L. Hatšijan (1978) ja R. Karmarkar (1984) panid aluse polünomiaalsetele lahendusalgoritmidele. Arengule aitas kaasa arvutustehnika kiiruse kasv, mis mängis olulist rolli ka varem, kui väga suurte muutujate ja kitsenduste arvuga ülesandeid eelnevalt suure mahu tõttu lahendamatuks peeti. Nende lahendamise muutis võimalikuks just elektronarvutite laialdane kasutuselevõtt [1].

1.2 Ülesande püstitus

Ülesande püstituse selgitamist alustame lihtsa näitega, kus vaatluse all on jalgrattatehase tootmisprotsess kasu teenimise eesmärgil. Näiteülesanne on võetud veebilehelt [3], lahendused nii simpleksmeetodi kui Karmarkari meetodiga on vormistatud käesoleva töö autori poolt.

Jalgrattatehases toodetakse mägi- ja maanteejalgrattaid. Firma soovib teada, milles koguses kumbagi ratast kasumi maksimiseerimiseks toota, eeldusel, et nad suudavad kõik toodetud jalgrattad maha müüa. On teada, et ettevõttes suudetakse päeva jooksul toota maksimaalselt kaks mägi- ja kolm maanteejalgratast. Mõlemad rattad peavad läbi käima viimistlusosakonnast, mis suudab päeva jooksul tegeleda maksimaalselt nelja rattaga. Lisaks on teada, et mägi- ja maanteejalgrataste müügist teenitakse 15 dollarit ja maanteejalgrataste müügist 10 dollarit kasumit ühe ratta kohta.

Tähistades esitatud näites mägi- ja maanteejalgrataste arvu sümboliga x_1 ja maanteejalgrataste arvu sümboliga x_2 , saab selle ülesande esitada järgmisel nn standardkujul:

$$\begin{aligned} \max z &= 15x_1 + 10x_2, \\ x_1 &\leq 2, \\ x_2 &\leq 3, \\ x_1 + x_2 &\leq 4, \\ x_i &\geq 0, \quad i = 1, 2. \end{aligned} \tag{1}$$

Allpool esitatud üldise ülesande püstituse kontekstis tähistame $\mathbf{b} = (2, 3, 4)^T$, $\mathbf{c} = (15, 10)$ ja

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Selle ülesande lahendamise tegeleme edasi peatükkides 2 ja 3. Nüüd esitame lineaarse planeerimise ülesande üldise matemaatilise kuju.

Olgu antud vektorid $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_m)^T$ ja $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_n)$ ning $m \times n$ maatriks

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix},$$

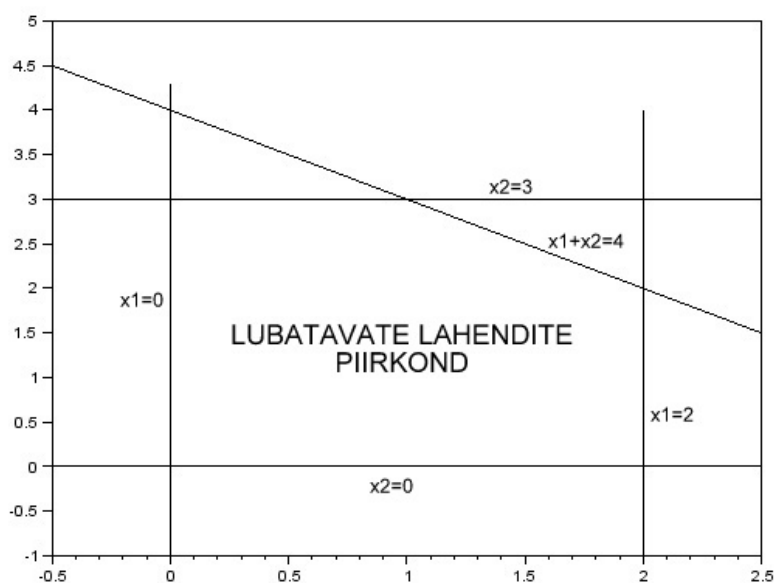
mille kõik elemendid on reaalarvud. Lineaarse planeerimise ülesande lahendamiseks tuleb leida mittenegatiivsete komponentidega vektor $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$, nii et sihifunktsiooni $z = (\mathbf{c}, \mathbf{x}) = c_1x_1 + \dots + c_nx_n$ väärtus oleks maksimaalne kitsendustel $A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$ ehk maksimiseerida funktsioon $z = (\mathbf{c}, \mathbf{x})$, kus muutuja \mathbf{x} väärtused kuuluvad hulktahukasse $\{\mathbf{x}: A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$. Funktsiooni $z = (\mathbf{c}, \mathbf{x})$ nimetatakse sihifunktsiooniks, otsitava vektori \mathbf{x} komponente juhitavateks muutujateks (ka otsustusmuutujateks) ning hulka $Q = \{\mathbf{x}: A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$ lubatavate lahendite hulgaks. Vektrorkujul esitub antud ülesanne järgnevalt [1]:

$$\begin{aligned} z = (\mathbf{c}, \mathbf{x}) &\rightarrow \max, \\ A\mathbf{x} &\leq \mathbf{b}, \\ \mathbf{x} &\geq \mathbf{0}. \end{aligned} \tag{2}$$

Kuna näiteülesandes on juhitavaid muutujaid vaid kaks, saab seda illustreerida ka graafiliselt. Selleks tuleb kõigepealt x_1x_2 -tasandile kanda kitsenduste graafikud. Lubatavad lahendid jäävad kõigi nende joonte poolt piiratud ala sisse (joonis 1).

Mida suuremad on muutujate x_1 ja x_2 väärtused, seda suurem on ka sihifunktsiooni väärtus (joonis 2).

Maksimiseerides otsitakse sellist lahendite komplekti, mille korral sihifunktsiooni väärtus oleks antud kitsenduste juures suurim ehk sellist funktsiooni z graafikut, mille lõikejoon x_1x_2 -



Joonis 1: Lubatavate lahendite piirkond.

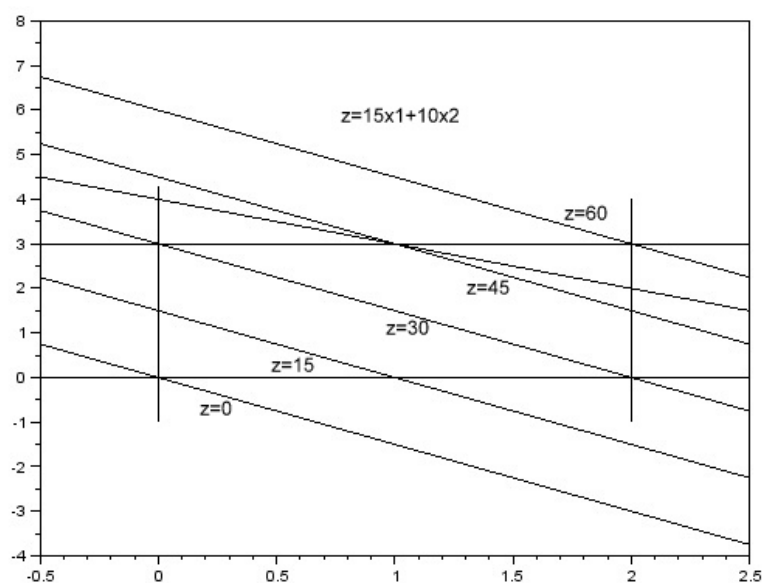
tasandiga oleks võimalikult kaugel paremal, kuid mille vähemalt üks punkt siiski lubatavate lahendite piirkonda kuuluks (joonis 3).

Selliste ülesannete süstemaatilisele lahendamisele panid teineteisest sõltumatult aluse eelkõige vene matemaatik Leonid Kantorovitš 1939. aastal ja ameeriklane George Dantzig 1947. aastal. Dantzig, kes tegi tol ajal koostööd Ameerika Õhujõududega, märkas kaaslastega, et paljud lahendamist vajavad probleemid on puhtalt matemaatilised konstruktsioonid – otsitavaks on lineaarse võrrandi maksimum või miinimum, mille muutujatele seavad piirangu lineaarsed võrrandid või võrratused [4]. Nimetatud teadlaste poolt konstrueeritud simpleksmeetodist antakse ülevaade järgmises peatükis.

2 Simpleksmeetod

2.1 Tutvustus

1947. aastal kavandas George Dantzig simpleksmeetodi LP ülesande lahendamiseks, mille idee seisneb hulktahuka $Q = \{x: Ax \leq b, x \geq 0\}$ tippude läbimises mööda servi, liikudes nii, et $z = (c, x)$ kasvab, kuni on leitud optimaalne lahend. Oletame, et lubatavate lahendite hulk ei ole



Joonis 2: Erinevad võimalikud sihifunktsiooni väärtused.

tühi ega tõkestatud. Antud meetod põhineb asjaolul, et kui hulktahuka Q tipp \mathbf{x}^0 ei maksimiseeri funktsiooni $z = (\mathbf{c}, \mathbf{x})$, siis leidub temaga serva moodustav tipp \mathbf{x}^1 , nii et $z_1 = (\mathbf{c}, \mathbf{x}^1) > z_0 = (\mathbf{c}, \mathbf{x}^0)$ [5].

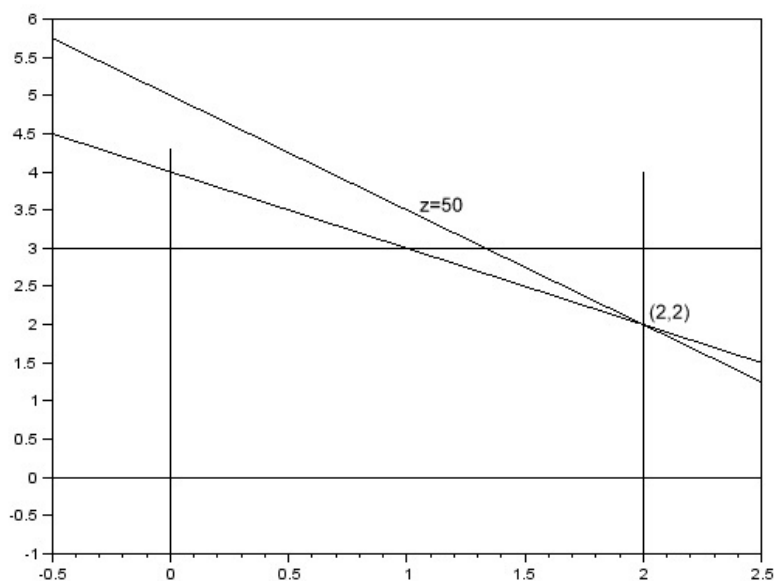
2.2 Eeltöö

Vaatame näiteülesande (1) lahendamist simpleksmeetodi abil [1].

Lähtesamm. Võtame $z = x_0$ ja viime selles võrduses kõik muutujad vasakule. Ülejäänud võrratused muudame võrdusteks mittenegatiivsete muutujate x_3, x_4 ja x_5 abil.

$$\begin{aligned}
 x_0 - 15x_1 - 10x_2 &= 0 & (0.\text{rida}) \\
 x_1 + x_3 &= 2 & (1.\text{rida}) \\
 x_2 + x_4 &= 3 & (2.\text{rida}) \\
 x_1 + x_2 + x_5 &= 4 & (3.\text{rida})
 \end{aligned} \tag{3}$$

Kuna selles süsteemis on neli võrrandit ja kuus muutujat, on lahendeid lõpmatult palju. Kõige lihtsamini on leitav lahend, kus $x_0 = 0$, $x_3 = 2$, $x_4 = 3$, $x_5 = 4$ ja $x_1 = x_2 = 0$. Sellist lahendit nimetatakse baasilahendiks, kus x_0, x_3, x_4, x_5 on baasimuutujad ja x_1, x_2 baasivälised



Joonis 3: Optimaalne lahend.

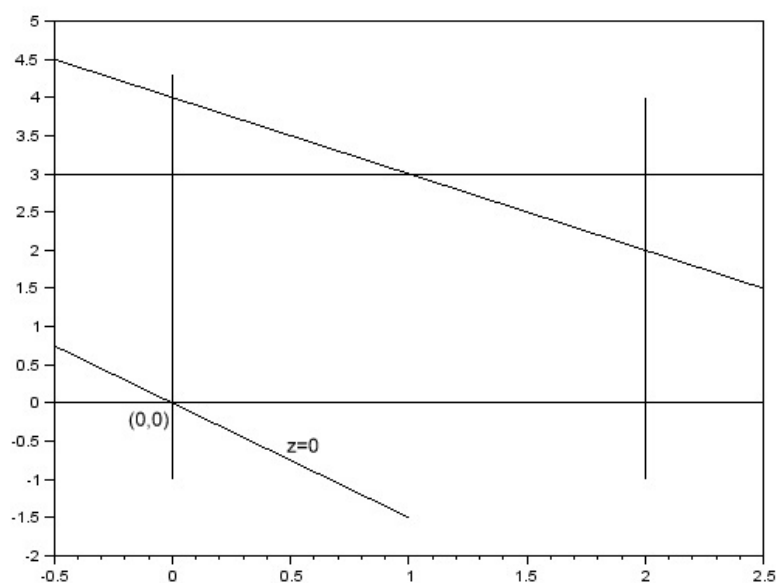
muutujad. Kasutades vaid lähteülesande muutujaid, on leitud lubatav lahend $x_1 = x_2 = 0$, $x_0 = z = 0$ (joonis 4).

2.3 Iteratsioonisamm

Igal järgneval simpleksmeetodi sammul tuuakse baasi üks muutuja vastavalt kriteeriumile I ja viiakse välja teine vastavalt kriteeriumile II.

Kriteerium I. Arvestades, et iga nullinda rea negatiivne kordaja näitab, kui palju selle muutuja ühikulise kasvu korral suureneb sihifunktsiooni x_0 väärtus, tuuakse baasi see muutuja, mille negatiivse kordaja absoluutväärtus nullindas reas on kõige suurem. Sel viisil saavutatakse suurim võimalik sihifunktsiooni väärtuse kasvu kiirus. Näiteülesandes tuuakse seega baasi x_1 , millele vastavat veergu nimetatakse juhtveeruks.

Muutuja x_1 baasi toomine mõjutab ka teisi muutujaid, kuna selle suurenemisel nullist alates peavad vähenema need baasimuutujad, millele vastavates ridades on muutuja x_1 kordajad positiivsed ja millede endi kordajad on negatiivsed. Vaadeldavas ülesandes tähendab see seda, et võrduste kehtima jäämiseks peavad muutuja x_1 suurenemisel ühe võrra esimeses reas baasimuutuja x_3 ning kolmandas reas baasimuutuja x_5 ühe võrra vähenema. Muutuja x_1 saab kasvada seni,



Joonis 4: Lubatav lahend $(0, 0)$.

kuni x_3 või x_5 on saanud võrdseks nulliga, ehk kuni väärtuseni $\min\{2/1, 4/1\} = 2$. Seega, kui x_1 tuleb baasi ja kasvab kaheni, lahkub baasist nullini vähenenud x_3 . Minimaalsele võrrandi parema poole ja juhtveeru elemendi kordaja jagatisele vastavat rida nimetatakse juhtreaks, anud juhul on selleks 1. rida, ning juhtveeru ja juhtrea lõikepunktis asuvat elementi juhtelemendiks.

Kriteerium II. Tähistame read, milles juhtveeru elemendid on positiivsed. Leiame nendes ridades minimaalse paremate poolte ja juhtveeru elementide jagatised. Miinimumile vastavast juhtreast viiakse juhtveeruga ristuv element baasist välja.

Simplekstabeli (3) teisendused on samasugused nagu Gaussi meetodis.

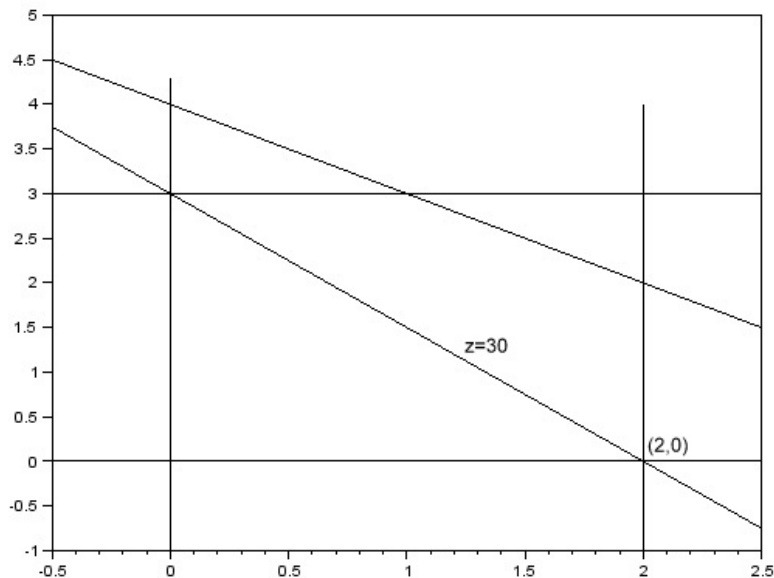
Uus 0. rida = vana 0. rida $-(-15)$ I rida,

uus III rida = vana III rida $-$ I rida.

$$\begin{array}{rclcl}
 x_0 & -10x_2 + 15x_3 & = & 30 & (0.\text{rida}) \\
 x_1 & & + & x_3 & = 2 \quad (1.\text{rida}) \\
 & x_2 & & + x_4 & = 3 \quad (2.\text{rida}) \\
 & x_2 - x_3 & & + x_5 & = 2 \quad (3.\text{rida})
 \end{array} \tag{4}$$

Süsteemid (3) ja (4) on samaväärsed ja neil on samad lahendid, sest Gaussi teisendused seda ei muuda. Süsteemile (4) vastav lahend on $x_0 = 30$ (sihifunktsioon kasvas), $x_1 = 2$, $x_4 =$

3, $x_5 = 2$ ja $x_2, x_3 = 0$. Lähtemuutujad $x_1 = 2$, $x_2 = 0$, $x_0 = 30$ annavad meile esialgse ülesande teise lubatava lahendi $(2, 0)$, mis paikneb kitsendustega piiratud hulktahuka tipus (joonis 5).



Joonis 5: Lubatav lahend $(2, 0)$.

Paneme tähele, et kui nullinda rea kordajad on mittenegatiivsed, siis nende kasvades saab sihifunktsiooni väärtus vaid kahaneda. Kuna ülesanne näeb ette sihifunktsiooni maksimiseerimise, tulebki arvutusi korrata nii kaua, kuni nullinda rea kordajad on mittenegatiivsed.

Kriteeriumi I kohaselt tuleb baasi tuua x_2 , kuna selle ees olev kordaja on ainuke nullinda rea negatiivne kordaja. Positiivsed kordajad muutuja x_2 ees on teises ja kolmandas reas. Minimaalne paremate poolte ja muutuja x_2 kordajate jagatis on 2, seega lahkub baasist x_5 . Esitame vajalikud Gaussi teisendused.

$$\text{Uus 0. rida} = \text{vana 0. rida} - (-10) \text{ III rida},$$

$$\text{uus II rida} = \text{vana II rida} - \text{III rida}.$$

Uus võrrandisüsteem on seega

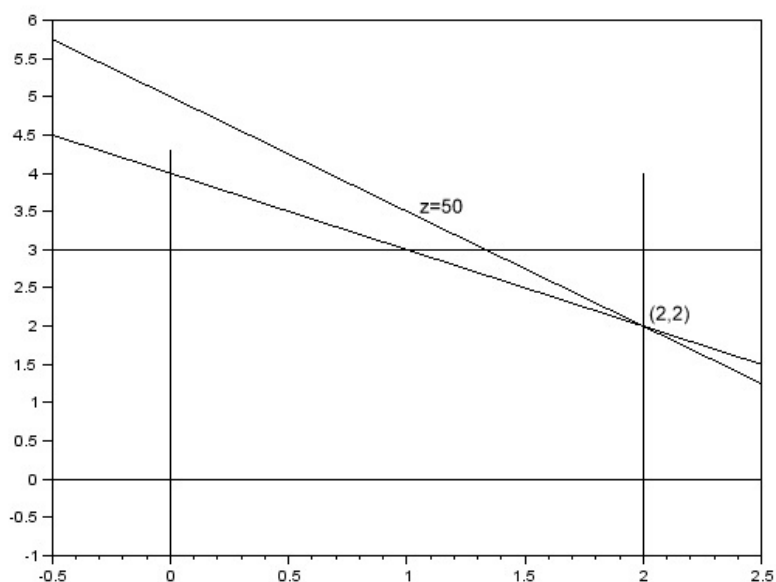
$$x_0 + 5x_3 + 10x_5 = 50 \quad (0.\text{rida})$$

$$x_1 + x_3 = 2 \quad (1.\text{rida})$$

$$x_3 + x_4 + x_5 = 1 \quad (2.\text{rida})$$

$$x_2 - x_3 + x_5 = 2 \quad (3.\text{rida})$$

ning selle üks lahend $x_0 = 50$, $x_1 = 2$, $x_2 = 2$, $x_4 = 1$ ning $x_3, x_5 = 0$. Vaid lähteülesande muutujaid vaadates oleme leidnud ülesande optimaalse lahendi, sest sihifunktsiooni liikmete kordajad on positiivsed. Lahendiks on $x_1 = 2$, $x_2 = 2$ ning sihifunktsiooni väärtuseks $x_0 = 50$ (joonis 6).



Joonis 6: Optimaalne lahend (2, 2).

Kuigi praktikas on tegemist väga tõhusa meetodiga, mis võimaldab lahendada tuhandete muutujatega võrrandeid, on võimalik konstrueerida tehislikke näiteid, kus lahendamisele kuluv aeg on sisendi pikkuse suhtes eksponentsiaalselt kasvav. Järgmises peatükis tutvustatav Karmarkari meetod jõuab selliste suuremõõtmeliste ülesannete puhul kiiremini lahendini.

3 Karmarkari meetod ehk sisepunkti meetod

3.1 Meetodi ajalugu ja selle tähtsus

Sisepunkti meetodi töötas 1984. aastal välja USAs elav India matemaatik Narendra Karmarkar. Meetodi eelis simpleksmeetodi ees seisneb selle väiksemas arvutuskulus suurte ülesannete korral, kui muutujaid ja kitsendusi on väga palju. Olgu L bittide arv, mis on vajalik lineaarse planeerimise ülesande kõikide kordajate esitamiseks. Siis selle ülesande Karmarkari meetodiga lahendamiseks vajalike tehete arv on muutuja L suhtes polünoom ehk Karmarkari meetod on polünoomiaalne algoritm. Simpleksmeetod seevastu on eksponentsiaalne, mis tähendab, et selle meetodiga optimaalse lahendi leidmiseks võib vaja minna kuni $C2^L$, arvutustehet, kus C on mingi konstant. Heaks näiteks meetodi tõhususe kohta on USA õhujõudude lennumarsruutide ülesanne, mis sisaldas 150 000 muutujat ja 12 000 kitsendust. Arvuti lahendas ülesande ühe tunniga ning selle abil koostati optimaalne lennugraafik 400 lennuki jaoks, hoides aastas kokku üle miljoni dollari. Kuigi Karmarkari meetod oli algselt kavandatud just lineaarse planeerimise ülesannete lahendamiseks, on see muutunud populaarseks lahendusmeetodiks ka mittelineaarsete probleemide jaoks [6].

3.2 Duaalne lineaarse planeerimise ülesanne

Enne konkreetsemalt Karmarkari meetodi kirjeldamist tutvume duaalse lineaarse planeerimise ülesande ehk lühidalt duaalülesande koostamisega. Seda kasutame hiljem näitamaks, kuidas suvalist ülesannet Karmarkari meetodi rakendamiseks vajalikule kujule viia [1]. Olgu LP ülesanne standardsel kujul.

$$z = c_1x_1 + \dots + c_nx_n \rightarrow \max,$$

$$y_1 : a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1,$$

$$\dots\dots\dots$$

$$y_m : a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m,$$

$$\mathbf{x} \geq 0.$$

Selle duaalülesanne on siis

[illegible]

Mõlemad ülesanded vektorkujul kirja pannes saame, et ülesande

$$\begin{aligned} \max \quad & z = (\mathbf{c}, \mathbf{x}), \\ \text{s.t.} \quad & A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}, \\ & \mathbf{x} \geq 0 \end{aligned}$$

duaaliölesanne on

$$\begin{aligned} \min \quad & w = (\mathbf{y}, \mathbf{b}), \\ & \mathbf{y}A \geq \mathbf{c}, \\ & \mathbf{y} \geq 0. \end{aligned}$$

Jalgrattatehase näite puhul on seega ülesande

$$\begin{array}{rcl} z = 15x_1 + 10x_2 & \rightarrow & \max, \\ x_1 & \leq & 2, \\ x_2 & \leq & 3, \\ x_1 + x_2 & \leq & 4, \\ \mathbf{x} & \geq & 0 \end{array}$$

duaalülesandeks

$$\begin{aligned} w &= 2y_1 + 3y_2 + 4y_3 \rightarrow \min, \\ y_1 &+ y_3 &\geq 15, \\ y_2 + y_3 &\geq 10, \\ \mathbf{y} &\geq 0. \end{aligned} \tag{5}$$

Esialgse ülesande ja tema duaalse ülesande vahel kehtib oluline seos, mida tuntakse ka duaalsusteoreemi nime all. Duaalsusteoreemi kohaselt on esialgse ülesande ja selle duaalülesande sihifunktsioonide optimaalsed väärtused optimaalse lahendi olemasolul võrdsed (teoreemi tõestus on leitav Ülo Kaasiku ja Lembit Kivistiku õpikust [2]). Selle tulemuse abil saamegi suvalise ülesande Karmarkari meetodi rakendamiseks vajalikule kujule viia.

3.3 Lineaarse planeerimise ülesanne Karmarkari kujul

Karmarkari meetodit saab rakendada neile ülesannetele, mis esituvad järgmisel nn põhikujul [6]:

$$\begin{aligned} \min z &= (\mathbf{c}, \mathbf{x}) \\ \text{kitsendustel } \left\{ \begin{array}{l} A\mathbf{x} &= \mathbf{0} \\ \sum_{i=1}^n x_i &= 1 \\ \mathbf{x} &\geq \mathbf{0} \end{array} \right. \end{aligned} \quad (6)$$

Siin $\mathbf{0}$ on nullidest koosnev vektor, $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{Z}^n$ ja $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$. Antud ülesanne on (2) erijuht, kuna tuleb leida \mathbf{x} , mis maksimiseerib avaldise $-(\mathbf{c}, \mathbf{x})$, nii et $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$, $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ja $\mathbf{1}^T \mathbf{x} = \sum_{i=1}^n x_i = 1$.

Lisaks eeldatakse, et

$$\mathbf{x} = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n} \right) \text{ on lubatav ja } z_{\min} = 0.$$

Suvalise standardsel kujul oleva ülesande saab sellisele kujule viia, kui ülesande lubatavate lahendite piirkond on tõkestatud ja leidub optimaalne lahend. Vaatame näiteülesande (1) abil, kuidas seda teha. Eelnevalt nägime, et selle duaalülesanne esitub võrrandisüsteemina (5). Mittemnegatiivsete muutujate abil teisendame nii esialgse ülesande kui selle duaalülesande kitsendused võrdusteks. Duaalsusteoreemist tulenev sihifunktsioonide võrdsus on antud järgneva võrrandisüsteemi esimese võrrandina.

$$\begin{aligned} 15x_1 + 10x_2 - 2y_1 - 3y_2 - 4y_3 &= 0, \\ x_1 &+ s_1 = 2, \\ x_2 &+ s_2 = 3, \\ x_1 + x_2 &+ s_3 = 4, \\ y_1 &+ y_3 + e_1 = 15, \\ y_2 + y_3 + e_2 &= 10. \end{aligned} \quad (7)$$

Paneme tähele, et selle võrrandisüsteemi kõik muutujad on mittenegatiivsed. Eelduse kohaselt on ülesandel tõkestatud optimaalne lahend. Järelikult on kõikide muutujate summa ka tõkesta-

tud ning ei ületa piisavalt suurt arvu M . Vaadeldavas näites võime võtta $M = 100$.

$$x_1 + x_2 + y_1 + y_2 + y_3 + s_1 + s_2 + s_3 + e_1 + e_2 + d_1 = 100, \quad (8)$$

kus d_1 on mittenegatiivne muutuja, mille abil teisendame võrratuse võrduseks. Lisaks võtame kasutusele fikseeritud muutuja $d_2 = 1$, millega korrutame läbi süsteemide (7) ja (8) paremad pooled ning viime saadud tulemused teisele poole võrdusmärgi.

$$\begin{aligned} 15x_1 + 10x_2 - 2y_1 - 3y_2 - 4y_3 &= 0, \\ x_1 &+ s_1 - 2d_2 = 0, \\ x_2 &+ s_2 - 3d_2 = 0, \\ x_1 + x_2 &+ s_3 - 4d_2 = 0, \\ y_1 &+ y_3 + e_1 - 15d_2 = 0, \\ y_2 + y_3 + e_2 - 10d_2 &= 0, \\ x_1 + x_2 + y_1 + y_2 + y_3 + s_1 + s_2 + s_3 + e_1 + e_2 + d_1 - 100d_2 &= 0, \\ x_1 + x_2 + y_1 + y_2 + y_3 + s_1 + s_2 + s_3 + e_1 + e_2 + d_1 + d_2 &= 101. \end{aligned}$$

Kuna põhikujus on kõikide muutujate summa võrdne ühega, jagame kõik võrrandid läbi $M + 1 = 101$ -ga ning teeme asendused $x'_1 = \frac{x_1}{101}$, $x'_2 = \frac{x_2}{101}$ jne.

$$\begin{aligned} 15x'_1 + 10x'_2 - 2y'_1 - 3y'_2 - 4y'_3 &= 0, \\ x'_1 &+ s'_1 - 2d'_2 = 0, \\ x'_2 &+ s'_2 - 3d'_2 = 0, \\ x'_1 + x'_2 &+ s'_3 - 4d'_2 = 0, \\ y'_1 &+ y'_3 + e'_1 - 15d'_2 = 0, \\ y'_2 + y'_3 + e'_2 - 10d'_2 &= 0, \\ x'_1 + x'_2 + y'_1 + y'_2 + y'_3 + s'_1 + s'_2 + s'_3 + e'_1 + e'_2 + d'_1 - 100d'_2 &= 0, \\ x'_1 + x'_2 + y'_1 + y'_2 + y'_3 + s'_1 + s'_2 + s'_3 + e'_1 + e'_2 + d'_1 + d'_2 &= 1. \end{aligned}$$

Punkt, kus kõik muutujad on võrdsed, peab olema lubatud, seega võtame minimiseeritavaks funktsiooniks $z = d'_3$ ja lisame mittenegatiivse muutuja d'_3 viimase võrrandi vasakule poolele. Teiste võrrandite vasakule poolele lisame d'_3 sellise kordajaga, et iga võrrandi kordajate summa võrduks nulliga. Sellega on tagatud sellise vektori lubatavus, mille kõik koordinaadid on

võrdsed ja võrduvad arvuga $\frac{1}{13}$.

$$\begin{aligned}
 z &= d'_3 \rightarrow \min \\
 15x'_1 + 10x'_2 - 2y'_1 - 3y'_2 - 4y'_3 &\quad - 16d'_3 = 0 \\
 x'_1 &\quad - s'_1 - 2d'_2 = 0 \\
 &\quad x'_2 \quad + s'_2 - 3d'_2 + d'_3 = 0 \\
 x'_1 + x'_2 &\quad + s'_3 - 4d'_2 + d'_3 = 0 \\
 &\quad y'_1 + y'_2 \quad + e'_1 - 15d'_2 + 12d'_3 = 0 \\
 &\quad y'_2 + y'_3 - e'_2 - 10d'_2 + 7d'_3 = 0 \\
 x'_1 + x'_2 + y'_1 + y'_2 + y'_3 + s'_1 + s'_2 + s'_3 + e'_1 + e'_2 + d'_1 - 100d'_2 + 89d'_3 &= 0 \\
 x'_1 + x'_2 + y'_1 + y'_2 + y'_3 + s'_1 + s'_2 + s'_3 + e'_1 + e'_2 + d'_1 + d'_2 + d'_3 &= 1
 \end{aligned} \tag{9}$$

Eelduse kohaselt peab sihifunktsiooni minimaalne väärtus olema 0, mis mittenegatiivse muutuja d'_3 puhul kehtib. Oleme jõudnud põhikujul (6) esituva võrrandisüsteemini, mille saab Karmarkari meetodiga lahendada.

3.4 Karmarkari meetod

Karmarkari meetodi kirjeldamiseks on mitmeid erinevaid viise. Käesolevas töös käsitletakse seda nii nagu doktor Shirish K. Shevade poolt läbiviidavas NPTEL-i (National Programme on Technology Enhanced Learning) numbrilise optimeerimise kursusel [7]. Karmarkari meetodi peamine erinevus simpleksmeetodist seisneb selles, et kui simpleksmeetodi puhul jõutakse optimaalse lahendini liikudes mööda kõrvuti asetsevaid lubatavate lahendite piirkonna tippe, siis Karmarkari meetodi puhul liigutakse optimaalse lahendi poole läbi lubatavate lahendite piirkonna.

Meetodi põhiidee seisneb järjestikuste lähendite $\mathbf{x}^0, \mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \dots$ leidmises optimaalsele lahendile. Selleks tuleb igal iteratsioonisammul algse lubatavate lahendite hulga, mida nimetame edaspidi x -ruumiks, punkt teisendada selle teisenduse teel saadud lubatavate lahendite piirkonnaks, olgu see y -ruum, sisepunktiks. Sellest teisendatud lubatavate lahendite ruumi punktist tuleb liikuda sihifunktsiooni kiireima kahanemise suunas ning saadud punkt esialgsesse ruumi tagasi teisendada. Teisisõnu, tähistades ülesande kitsenduste poolt määratud lubatavate lahendite hulga ehk x -ruumi punkti \mathbf{x}^k -ga, teisendame selle y -ruumi keskpunktiks \mathbf{y}^k . Sellest punktist liigume suunas, mille tähistame sümboliga \mathbf{d} . Uueks lähendiks saame $\mathbf{y}^{k+1} = \mathbf{y}^k + \alpha^k \mathbf{d}^k$, kus α^k

on selline kordaja, et \mathbf{y}^{k+1} ei väljuks y -ruumi lubatavate lahendite piirkonnast ja \mathbf{d}^k liikumise suund punktist \mathbf{y}^k punkti \mathbf{y}^{k+1} . Viimaks teisendame y -ruumi punkti \mathbf{y}^{k+1} esialgse lubatavate lahendite piirkonna punktiks \mathbf{x}^{k+1} .

Defineerime vajamineva teisenduse T järgnevalt:

$$\mathbf{y} = T(\mathbf{x}) = \frac{(X^k)^{-1}\mathbf{x}}{\mathbf{1}^T(X^k)^{-1}\mathbf{x}}, \quad \mathbf{x} \neq \mathbf{0}.$$

Siin X^k on maatriks, mille peadiagonaalil on \mathbf{x}^k elemendid ja mujal nullid. Selline teisendus annab tulemuseks $\mathbf{y} = T(\mathbf{x})$, mis on teisenduse teel saadud n -mõõtmelise nn y -ruumi keskpunkt $\left(\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}\right)^T$. Näitame, et see iga n korral tõepoolest nii on ja leiame $\mathbf{y} = \frac{(X^k)^{-1}\mathbf{x}}{\mathbf{1}^T(X^k)^{-1}\mathbf{x}}$. Selleks arvutame eraldi kõigepealt murru lugeja

$$(X^k)^{-1}\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \frac{1}{x_1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{x_2} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{x_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{x_1} \\ \frac{1}{x_2} \\ \vdots \\ \frac{1}{x_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

ja nimetaja

$$\mathbf{1}^T(X^k)^{-1}\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = n.$$

Jagades lugejas oleva ühtedest koosneva veeruvektori skalaariga n , saamegi, et

$\mathbf{y} = \left(\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}\right)^T$. Lisaks paneme tähele, et $\mathbf{1}^T\mathbf{y} = \mathbf{1}^T \cdot \frac{(X^k)^{-1}\mathbf{x}}{\mathbf{1}^T(X^k)^{-1}\mathbf{x}} = 1$, kus $\mathbf{1}$ on ühtedest koosnev veeruvektor, seega iga \mathbf{x} teisendatakse y -ruumi keskpunktiks.

Leiame T^{-1} , et teisendatud lubatavate lahendite hulgas ehk y -ruumis leitud lähend tagasi esialgse lubatavate lahendite hulga punktiks teisendada.

$$\begin{aligned} \mathbf{y} &= \frac{(X^k)^{-1}\mathbf{x}}{\mathbf{1}^T(X^k)^{-1}\mathbf{x}} \mid \cdot X^k \\ X^k\mathbf{y} &= \frac{\mathbf{x}}{\mathbf{1}^T(X^k)^{-1}\mathbf{x}} \mid \cdot \mathbf{1}^T X^{k-1}\mathbf{x} \\ \mathbf{x} &= [\mathbf{1}^T(X^k)^{-1}\mathbf{x}] (X^k\mathbf{y}). \end{aligned}$$

Kuna iga lubatava \mathbf{x} -i jaoks ülesande eelduse kohaselt $\mathbf{1}^T\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n x_i = 1$, siis

$$1 = \mathbf{1}^T \mathbf{x} = [\mathbf{1}^T (X^k)^{-1} \mathbf{x}] \mathbf{1}^T (X^k \mathbf{y}), \text{ millest } \mathbf{1}^T X^{k-1} \mathbf{x} = \frac{1}{\mathbf{1}^T X^k \mathbf{y}} \text{ ja järelikult}$$

$$T^{-1}(\mathbf{y}) = \mathbf{x} = \frac{X^k \mathbf{y}}{\mathbf{1}^T X^k \mathbf{y}}.$$

Kasutades saadud tulemust, saame esilagse ülesandega

$$\min \mathbf{c}^T \mathbf{x}$$

$$A\mathbf{x} = \mathbf{0},$$

$$\mathbf{1}^T \mathbf{x} = 1,$$

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

samaväärse ülesande

$$\min \frac{\mathbf{c}^T X^k \mathbf{y}}{\mathbf{1}^T X^k \mathbf{y}}$$

$$AX^k \mathbf{y} = \mathbf{0},$$

$$\mathbf{1}^T \mathbf{y} = 1,$$

$$\mathbf{y} \geq \mathbf{0}.$$

Sellega oleme lineaarvõrrandite süsteemi asendanud mittelineaarsega, kuna saadud süsteemi sihifunktsiooni avaldises on kahe lineaarse võrrandi jagatis. Lineaarse võrrandisüsteemi saamiseks meenutame, et $x_i \geq 0$, $i = 1, \dots, n$ ja järelikult $X^k \geq 0$. Lisaks on \mathbf{y} positiivne, sest see on lubatavate lahendite piirkonna sisepunkt. Seega sihifunktsiooni nimetaja $\mathbf{1}^T X^k \mathbf{y}$ on positiivne ja tõkestatud, mistõttu funktsiooni minimiseerimiseks tuleb minimiseerida selle lugejat ja järelikult saame ülesande esitada järgmisel lineaarsel kujul

$$\min \mathbf{c}^T X^k \mathbf{y}$$

$$AX^k \mathbf{y} = \mathbf{0},$$

$$\mathbf{1}^T \mathbf{y} = 1,$$

$$\mathbf{y} \geq \mathbf{0}.$$

(10)

Kokkuvõttes oleme homogeensel kujul oleva lineaarse võrrandisüsteemi teisendanud y -ruumis olevaks homogeenseks lineaarseks võrrandisüsteemiks tänu sellele, et sihifunktsiooni optimaalne väärtus on 0 ja $\mathbf{1}^T X^k \mathbf{y} > 0$. Nüüd tuleb see süsteem kiireima kahanemise meetodiga lahendada.

Kiireima kahanemise suuna \mathbf{d} leidmiseks kasutame süsteemi (10) sihifunktsiooni gradiendi vastandvektorit, milleks on $-X^k \mathbf{c}$. Meenutame, et $\mathbf{d} = \mathbf{y}^{k+1} - \mathbf{y}^k$. Sama ülesande kitsendusi silmas

pidades saame, et $AX^k \mathbf{d} = AX^k(\mathbf{y}^{k+1} - \mathbf{y}^k) = \mathbf{0}$ ja $\mathbf{1}^T \mathbf{d} = \mathbf{1}^T \mathbf{y}^{k+1} - \mathbf{1}^T \mathbf{y}^k = 1 - 1 = 0$ ja seega tuleb sihifunktsiooni gradiendi vastandvektor $-X^k \mathbf{c}$ projitseerida pinnale

$\{\mathbf{d} : AX^k \mathbf{d} = \mathbf{0}, \mathbf{1}^T \mathbf{d} = 0, \mathbf{d} \geq \mathbf{0}\}$. Asendame nüüd võrrandisüsteemis (10) $\mathbf{y} = \mathbf{y}^k + \mathbf{d}$.

Saame

$$\begin{aligned} \min \mathbf{c}^T X^k (\mathbf{y}^k + \mathbf{d}) \\ AX^k (\mathbf{y}^k + \mathbf{d}) &= \mathbf{0}, \\ \mathbf{1}^T (\mathbf{y}^k + \mathbf{d}) &= 1, \\ (\mathbf{y}^k + \mathbf{d}) &\geq \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Kuna $\mathbf{c}^T X^k \mathbf{y}^k$ on teadaolev punkt ja seetõttu konstant, siis tuleb minimiseerida funktsiooni $\mathbf{c}^T X^k \mathbf{d}$ kitsendustel $AX^k \mathbf{d} = \mathbf{0}$, $\mathbf{1}^T \mathbf{d} = 0$ ja $\mathbf{d} \geq \mathbf{0}$. Selleks tuleb leida $-X^k \mathbf{c}$ projektsioon AX^k nullpinna, milleks tuleb minimiseerida $\frac{1}{2} \|X^k \mathbf{c} - \mathbf{d}\|^2$ kitsendustel $AX^k \mathbf{d} = \mathbf{0}$ ehk oleme jõudnud ülesandeni

$$\begin{aligned} \min \frac{1}{2} \|X^k \mathbf{c} - \mathbf{d}\|^2 \\ AX^k \mathbf{d} = \mathbf{0}. \end{aligned} \tag{11}$$

Kasutame Lagrange'i kordajate meetodit ja kirjutame ülesande järgmisel kujul:

$$\mathcal{L}(\mathbf{d}, \lambda) = \frac{1}{2} \|X^k \mathbf{c} - \mathbf{d}\|^2 + \lambda^T AX^k \mathbf{d}.$$

Siin $\lambda^T AX^k \mathbf{d} = \sum_{i=1}^n \lambda_i [AX^k \mathbf{d}]_i$. Leides sellest funktsioonist \mathbf{d} järgi gradiendi vektori ja võrdustades tulemuse nulliga, saame $-(X^k \mathbf{c} - \mathbf{d}) + X^k A^T \lambda = \mathbf{0}$, millest $\mathbf{d} = X^k \mathbf{c} - X^k A^T \lambda$. Korrutades saadud võrrandit AX^k -ga ja pidades silmas, et ülesande (11) kohaselt $AX^k \mathbf{d} = \mathbf{0}$, saame

$$\mathbf{0} = AX^k \mathbf{d} = A(X^k)^2 \mathbf{c} - A(X^k)^2 A^T \lambda \Rightarrow A(X^k)^2 \mathbf{c} = A(X^k)^2 A^T \lambda.$$

Avaldades saadud võrdusest λ ja asendades selle \mathbf{d} avaldisesse, saame leida \mathbf{d} . Sellega oleme jõudnud ülesande (11) lahendini \mathbf{d} . Nüüd tuleb leida \mathbf{d} projektsioon hulga $\mathbf{1}^T$, milleks on

$$\mathbf{d}^k = - \left(E - \frac{1}{n} \mathbf{1} \mathbf{1}^T \right) (X^k \mathbf{c} - X^k A^T \lambda).$$

Selles võrrandis E on ühikmaatriks ja $\mathbf{1}$ ühtedest koosnev n -mõõtmeline veeruvektor. Suuna \mathbf{d}^k leidmiseks asendame võrrandisse $\lambda = [A(X^k)^2 A^T]^{-1} [A(X^k)^2 \mathbf{c}]$ ja kasutame ainult neid \mathbf{d} väärtusi, mis on mittenegatiivsed.

Lühidalt kokku võttes saame seega järgmise algoritmi.

1. Sisenditeks homogeenne LP ülesanne, maatriks A , reavektor \mathbf{c} ja positiivne konstant ε ;
2. Võtame loenduri $k := 0$ ja alguspunktiks $\mathbf{x}^k = \frac{1}{n}\mathbf{1}$, kuna ülesande eelduse kohaselt kuulub see punkt lubatavate lahendite piirkonda;
3. Olgu $X^k = \text{diag}(\mathbf{x}^k)$;
4. Kuni $\mathbf{c}^T \mathbf{x}^k > \varepsilon$
 - (a) Leida kiireima kahanemise suund $\mathbf{d}^k = -\left(E - \frac{1}{n}\mathbf{1}\mathbf{1}^T\right)(X^k \mathbf{c} - X^k A^T \lambda)$, kus $\lambda = [A(X^k)^2 A^T]^{-1} [A(X^k)^2 \mathbf{c}]$;
 - (b) $\mathbf{y}^{k+1} = \frac{1}{n}\mathbf{1} + \frac{\delta}{\sqrt{n(n-1)}\|\mathbf{d}^k\|}\mathbf{d}^k$, kus $\frac{1}{n}\mathbf{1} = \mathbf{y}^k$, $\frac{\delta}{\sqrt{n(n-1)}} = \alpha^k$,
 δ on mingi pisike arv, näiteks $\frac{1}{3}$, ja liikumissuuna vektor on normaliseeritud;
 - (c) $\mathbf{x}^{k+1} = T^{-1}(\mathbf{y}^{k+1})$;
 - (d) $X^{k+1} = X^{k+1}$;
 - (e) $k := k + 1$.

Samme (a) - (e) tuleb läbi teha seni, kuni $\mathbf{c}^T \mathbf{x}^k < \varepsilon$ ja oleme saanud optimaalsele lahendile \mathbf{x}^* piisavalt lähedase punkti \mathbf{x}^k . Originaalis oli meetodil küll teistsugune peatumiskriteerium, kuid epsilon kasutamine on põhjendatud, sest üheks Karmarkari meetodi rakendamise eelduseks on, et sihifunktsiooni minimaalne väärtus on 0. Järgnevates alapeatükkides tutvume selle meetodi rakendamisega.

3.5 Näide Karmarkari meetodi ühe sammu kohta

Vaatame rattatehase näite abil, kuidas Karmarkari meetod praktikas rakendub. Peatükis 3.3 viisime selle ülesande Karmarkari meetodi rakendamiseks vajalikule kujule (9). Paneme tähele, et selles ülesandes $\mathbf{c} = (0 \dots 0 \ 1)$,

$$A = \begin{pmatrix} 15 & 10 & -2 & -3 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -16 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -15 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -10 & 7 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -100 & 89 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

ja $n = 13$, mistõttu $\mathbf{x}^0 = \frac{1}{13}\mathbf{1}$, kus $\mathbf{1}$ on ühtedest koosnev veeruvektor. Leiame programmi Scilab abil sihifunktsiooni väärtuse \mathbf{x}^0 korral: $z_0 = \mathbf{c}^T \mathbf{x}^0 = 0.0769231$. Seda arvu kasutame hiljem selleks, et näha, kas $\mathbf{c}^T \mathbf{x}^1 < \mathbf{c}^T \mathbf{x}^0$ ja me oleme optimaalsele lahendile lähemale liikunud. Maatriksi X^0 peadiagonaalil on \mathbf{x}^0 elemendid $\frac{1}{13}$ ja mujal nullid. Leiame punktist \mathbf{y}^0 optimaalsele lahendile lähedamal asuvasse punkti \mathbf{y}^1 liikumiseks vajaliku suuna \mathbf{d}^0 . Programmiga Scilab arvutame kõigepealt

$$\lambda = [A(X^0)^2 A^T]^{-1} [A(X^0)^2 \mathbf{c}] = \begin{pmatrix} 0.0059483 \\ -0.0248635 \\ -0.1047263 \\ -0.1658248 \\ -0.1069986 \\ -0.0249790 \\ 0.0301439 \\ 0.069255 \end{pmatrix},$$

mille asendame \mathbf{d}^0 avaldisesse ja saame, et

$$\mathbf{d}^0 = - \left(E - \frac{1}{n} \mathbf{1} \mathbf{1}^T \right) (X^0 \mathbf{c} - X^0 A^T \lambda) = \begin{pmatrix} -0.0001589 \\ -0.0085900 \\ -0.0014997 \\ -0.0038787 \\ 0.0038944 \\ 0.0095587 \\ -0.0004098 \\ -0.0051097 \\ -0.0005846 \\ 0.0095675 \\ 0.0076461 \\ -0.0048588 \\ -0.0055765 \end{pmatrix}.$$

Võttes nüüd $\delta = \frac{1}{3}$, leiame

$$\mathbf{y}^1 = \frac{1}{n} \mathbf{1} + \frac{\delta}{\sqrt{n(n-1)}} \frac{\mathbf{d}^0}{\|\mathbf{d}^0\|} = \begin{pmatrix} 0.0742553 \\ 0.0662695 \\ 0.0800878 \\ 0.0779076 \\ 0.0802488 \\ 0.0900084 \\ 0.0745181 \\ 0.0693094 \\ 0.0814795 \\ 0.0860007 \\ 0.0845165 \\ 0.0690465 \\ 0.0663519 \end{pmatrix},$$

$$\text{mille abil saame leida } x^1 = T^{-1}(\mathbf{y}^1) = \frac{X^0 \mathbf{y}^1}{\mathbf{1}^T X^0 \mathbf{y}^0} = \begin{pmatrix} 0.0004540 \\ 0.0003897 \\ 0.0004437 \\ 0.0004256 \\ 0.0004849 \\ 0.0005280 \\ 0.0004520 \\ 0.0004162 \\ 0.0004507 \\ 0.0005281 \\ 0.0005135 \\ 0.0004181 \\ 0.0004126 \end{pmatrix}.$$

Kontrollime, kas $\mathbf{c}^T \mathbf{x}^1 < \mathbf{c}^T \mathbf{x}^0$. Selleks arvutame $z_1 = \mathbf{c}^T \mathbf{x}^1 = 0.0003926$ ja näeme, et $z_1 < z_0 = 0.0769231$. Optimaalse lahendi leidmiseks tuleks samme (a)-(e) korrata seni, kuni on leitud optimaalne lahend nõutud täpsusega.

Nägime, et Karmarkari meetodiga ülesannete nõ käsitsi lahendamiseks läheb palju aega ja tööd, aga see meetod ongi loodud hoopis arvutite jaoks. Järgnevalt vaatame, kuidas Karmarkari meetodit rakendada programmiga Scilab.

3.6 Karmarkari meetod programmis Scilab

Vaatame nüüd, kuidas Karmarkari meetodiga ülesandeid praktikas lahendada. Selleks kasutame programmi Scilab abi, kus on olemas funktsioon *karmarkar*, mis lahendab etteantud ülesande Karmarkari meetodiga. Funktsiooni kasutamiseks sisestatakse käsklus *karmarkar(Aeq,beq,c,x0,rtolf,gam,maxiter,outfun,A,b)*, kus *Aeq* on $m \times n$ -mõõtmeline kitsenduste kordajate maatriks *A*, kusjuures *m* on kitsenduste ja *n* muutujate arv, ning *beq* on kitsenduste paremate poolte maatriks *b*, kui ülesanne on antud võrdustena. Sisend *c* on sihifunktsiooni kordajate vektor, *x0* alglahend, *rtolf* lahendi nõutav täpsus ja *maxiter* maksimaalne iteratsioonide arv. Järgmine sisend *outfun* on väljastatav funktsioon, mille tähtsamad osad on optimaalne lahend ja sihifunktsiooni optimaalne väärtus, *A* on tuttav kitsenduste kordajate maatriks *A* ja *b* kitsenduste paremate poolte vektor *b*, kui kitsendused on võrratuste kujul. Kõiki sisendeid

ei pea meetodi rakendamiseks kasutama. Töö esimeses peatükis tutvustatud näite korral saame seda ka demonstreerida.

Meenutame, et jalgrattatehase ülesande saame kirja panna järgmisel kujul

$$\begin{aligned} \max z &= 15x_1 + 10x_2, \\ x_1 &\leq 2, \\ x_2 &\leq 3, \\ x_1 + x_2 &\leq 4, \\ x_i &\geq 0, i = 1, 2 \end{aligned} \tag{12}$$

ja järelikut $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ ja $\mathbf{c} = (15, 10)$.

Vaadeldavas ülesandes on kitsendused võrratuste kujul, seega tuleb Scilab-s funktsiooni *karmarkar* edukaks rakendamiseks sisestada vaid maatriksid A , \mathbf{b} ning $-\mathbf{c}$. Miinusmärk vektori \mathbf{c} ees tuleneb sellest, et näiteülesandes on tuleb funktsioon maksimiseerida, aga Scilab tegeleb funktsiooni minimiseerimisega. Olles sisestanud vajalikud andmed, annab funktsiooni $x = \text{karmarkar}([], [], \mathbf{c}, [], [], [], [], [], A, \mathbf{b})$ rakendamine tulemuseks $x = \begin{pmatrix} 1.9999538 \\ 2.0000231 \end{pmatrix}$, mis on nelja komakoha täpsuseni võrdne simpleksmeetodi teel saadud lahendiga. Meenutame, et ülesande Karmarkari meetodiga lahendades saame optimaalse lahendi nõutud täpsusega lähendi ning järelikut oleme ülesande edukalt lahendanud.

Viited

- [1] Übi, E., *Lineaarne planeerimine ja selle rakendused*. Tallinn, Külim, 2007.
- [2] Kaasik, Ü., Kivistik, L., *Operatsioonianalüüs*. Tallinn, Valgus, 1982.
- [3] <http://www.sce.carleton.ca/faculty/chinneck/po.html>, *Practical Optimization: A Gentle Introduction*
- [4] Glicksman, A. M., *An Introduction to Linear Programming and the Theory of Games*. United States of America. John Wiley & Sons, 1963.
- [5] <http://oai.cwi.nl/oai/asset/10182/10182A.pdf>, *The Linear Programming Method of Kar-markar*
- [6] Übi, E., *Ekstreemumülesanded majanduses ja tehnikas*. Tallinn, Külim, 2002.
- [7] <http://nptel.ac.in/courses/106108056/37>, *Karmarkar's Method*

Lisad

Jooniste konstrueerimine programmis Scilab

```
//Joonis 1: Lubatavate lahendite piirkond.
```

```
x=[-0.5:0.0001:2.5]';  
f.figure_size=[];  
a.isoview="off";  
scf();  
clf();  
plot(x,0,'k');  
plot(x,3,'k');  
plot([0 0]',[-1 4.3],'k');  
plot([2 2]',[-1 4],'k');  
plot(x,4-x,'k');
```

```
//Joonis 2: Erinevad võimalikud sihifunktsiooni vaartused.
```

```
x=[-0.5:0.001:2.5]';  
f.figure_size=[];  
a.isoview="off";  
scf();  
clf();  
plot(x,0,'k');  
plot(x,3,'k');  
plot([0 0]',[-1 4.3],'k');  
plot([2 2]',[-1 4],'k');  
plot(x,4-x,'k');  
plot(x,-3/2*x,'k');  
plot(x,3/2-3/2*x,'k');  
plot(x,3-3/2*x,'k');  
plot(x,9/2-3/2*x,'k');  
plot(x,6-3/2*x,'k');
```

```

//Joonis 3: Optimaalne lahend.
x=[-0.5:0.001:2.5]';
f.figure_size=[];
a.isoview="off";
scf();
clf();
plot(x,0,'k');
plot(x,3,'k');
plot([0 0]',[-1 4.3],'k');
plot([2 2]',[-1 4],'k');
plot(x,4-x,'k');
plot(x,5-3/2*x,'k');

//Joonis 4: Lubatav lahend (0,0).
x=[-0.5:0.001:2.5]';
f.figure_size=[];
a.isoview="off";
scf();
clf();
plot(x,0,'k');
plot(x,3,'k');
plot([0 0]',[-1 4.3],'k');
plot([2 2]',[-1 4],'k');
plot(x,4-x,'k');
z=[-0.5:0.001:1]';
plot(z,-3/2*z,'k');

//Joonis 5: Lubatav lahend (2,0).
x=[-0.5:0.001:2.5]';
f.figure_size=[];
a.isoview="off";
scf();

```

```

clf();
plot(x,0,'k');
plot(x,3,'k');
plot([0 0]',[-1 4.3],'k');
plot([2 2]',[-1 4],'k');
plot(x,4-x,'k');
plot(x,3-3/2*x,'k');

//Joonis 6: Optimaalne lahend (2,2).
x=[-0.5:0.001:2.5]';
f.figure_size=[];
a.isoview="off";
scf();
clf();
plot(x,0,'k');
plot(x,3,'k');
plot([0 0]',[-1 4.3],'k');
plot([2 2]',[-1 4],'k');
plot(x,4-x,'k');
plot(x,5-3/2*x,'k');

```

Näiteülesande lahendus Karmarkari meetodiga programmis Scilab

```

//Jalgrattatehase ulesande lahendus Karmarkari meetodiga.
c = [-15 -10]';
A = [1 0
     0 1
     1 1];
b = [2 3 4]';
x=karmarkar([],[],c,[],[],[],[],[],A,b)
disp(x)

```

Lihtlitsents lõputöö reprodutseerimiseks ja lõputöö üldsusele kättesaadavaks tegemiseks

Mina, Dagmar Nurges (sünnikuupäev 12.05.1993),

1. annan Tartu Ülikoolile tasuta loa (lihtlitsentsi) enda loodud teose "Karmarkari meetod", mille juhendaja on Peep Miidla,
 - (a) reprodutseerimiseks säilitamise ja üldsusele kättesaadavaks tegemise eesmärgil, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace lisamise eesmärgil kuni autoriõiguse kehtivuse tähtaja lõppemiseni;
 - (b) üldsusele kättesaadavaks tegemiseks Tartu Ülikooli veebikeskkonna kaudu, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace kaudu kuni autoriõiguse kehtivuse tähtaja lõppemiseni.
2. olen teadlik, et punktis 1 nimetatud õigused jäävad alles ka autorile.
3. kinnitan, et litsentsi andmisega ei rikuta teiste isikute intellektuaalomandi ega isikuandmete kaitse seadusest tulenevaid õigusi.

Tartus 12.05.2016